ЛЕКЦИЯ-5
ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР ЖӘНЕ ҚАТАРЛАР

§1. Функциялық тізбектер мен қатарлардың жинақтылығы.

Егер 1, 2,…,n,.. натурал сандар қатарындағы әрбір n санына $X=\{x\}$ жиынында анықталған $f_n(x)$ функциясы сәйкес келсе

$$f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_n(x),... \qquad (1)$$

функциялық тізбек деп атайды және $\{f_n(x)\}$ деп белгілейді. X жиыны ретінде сан осінде әр түрлі аралықтарды алуға болады, сондықтан алдағы уақытта функциялық тізбекті $[a,b]$ кесіндісінде қарастырамыз.

Егер x аргументіне қайсыбір $x_0\in[a,b]$ берсек, онда сан тізбегін аламыз

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),...,\ f_n(x_0),...\ . \qquad (2)$$

Егер (2) жинақты болса,онда (1) функциялық тізбекті x_0 нүктесінде жинақталады немесе жинақты деп атайды, егер (2) сан тізбегі жинақталмаса немесе жинақсыз болса, онда (1) функциялық тізбекті x_0 нүктесінде жинақсыз деп атайды.Бірінші жағдайда x_0 нүктесін (1) қатардың жинақтылық нүктесі деп, екінші жағдайда оны жинақсыздық нүктесі деп атайды.

Егер функциялар тізбегі әрбір $x\ \in[a,b]$нүктесінде жинақты болса, оны $[a,b]$ аралығында жинақты деп атайды. $[a,b]$ аралығының әрбір x нүктесінде $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ шекті шек бар және ол, жалпы жағдайда, x тен тәуелді функция болады, оны (1) функциялық тізбектің шегі деп атайды да

$$f_n(x)\to f(x),\ n\to+\infty$$

немесе

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

жазады.

Функциялық тізбек жинақты болатын барлық x нүктелер жиынын тізбектің жинақтылық облысы деп атайды.

1-анықтама. $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функциясына жинақты деп атайды, егер $\forall x\in[a,b]$ мәнінде $f_n(x)$ сан тізбегі $f(x)$ функциясына жинақты болса, немесе $\forall\varepsilon>0$ және $\forall x\in[a,b]$ сәйкес $\mathrm{N}=\mathrm{N}(\varepsilon,x)$ табылып, $\forall n>\mathrm{N}(\varepsilon,x)$ үшін теңсіздік

$$\left|f_n(x)-f\ (x)\right|<\varepsilon\,,$$

орындалса.

2-анықтама. $\{f_n(x)\}$ функциялы тізбекті $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты деп атайды, егер $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес $\mathrm{N}=\mathrm{N}(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n>\mathrm{N}(\varepsilon)$ мәндерінде $\forall x\in[a,b]$ үшін

$$\left|f_n(x)-f\ (x)\right|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса.

$\{f_n(x)\}$ тізбегінің $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақтылығын төмендегідей:

$$f_n(x)\Rightarrow f(x),\ x\in[a,b]$$

белгілейді.

$[a,b]$ аралығында анықталған $\{u_n(x)\}$ функциялық тізбегінен қатар құрамыз

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (3)$$

3-анықтама. Егер (3) функциялық қатардың дербес қосындысы

$$S_n(x)=\sum_{n=1}^{n}u_n(x)$$

жинақты болса ,онда қатарды жинақты деп атайды.
Дербес қосындылар тізбегінің шегін $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ (3) қатардың қосындысы деп атайды, оны сан қатарындағыдай

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

жазады.
4-анықтама. (3) Функциялық қатарды $[a,b]$ аралығында $S(x)$ қосындысына бірқалыпты жинақты деп атайды, егер оның дербес қосындылар $\{S_n(x)\}$ тізбегі $[a,b]$ аралығында $S(x)$ қосындысына бірқалыпыты жинақты болса немесе $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес $\mathrm{N}(\varepsilon)$ нөмірі табылып $\forall n>\mathrm{N}(\varepsilon)$ мәндерінде

$$|S(x)-S_n(x)|==\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_n(x)\right|<\varepsilon$$

теңсіздігі $\forall x\in[a,b]$ орындалса.
Практикада жиі қолданылатын бірқалыпты жинақтылықтың белгісін келтіреміз.
Алдымен төмендегі анықтамаларды келтірейік.

Анықтама. Мүшелері теріс емес

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (4)$$

сан қатарын функциялық (3) қатарды можаранттайды немесе оның можаранты деп атайды, егер $\forall x\in[a,b]$ мәндерінде келесі теңсіздікті қанағаттандырса:

$$|u_n(x)|\le a_n\,,\quad n=1,2,\ldots\ . \qquad (5)$$

Вейерштрасс белгісі. Егер (3) функциялық қатар үшін $[a,b]$ аралығында оны можаранттайтын жинақты оң мүшелі сандық қатар бар болса, онда (3) қатар $[a,b]$ аралығында бірқалыпты және абсолютті жинақты.